СЕМИНАР

Круги Эйлера (диаграммы Эйлера — Венна)

Д.М. Златопольский,
Москва

Данная статья подготовлена в связи с публикацией в сентябрьском выпуске “В мир информатики” задачи “На каникулах”[1].

Напомним ее условие: “После летних каникул 2013 года учитель опросил ребят, кто из них ходил в театр, кино или цирк. Оказалось, что из 36 учеников двое не были ни в кино, ни в театре, ни в цирке. В кино побывали 25 человек, в театре — 11, в цирке — 17, и в кино и в театре — 6, и в кино и в цирке — 10, и в театре и в цирке — 4. Сколько человек побывали в театре, кино и цирке одновременно?”.

Обсудим методику решения задачи.

Задачи подобного типа удобно решать, используя так называемые “круги Эйлера”. Прежде чем подробно рассказывать о том, как именно это делать, рассмотрим и решим другую, более простую, задачу: “В классе 30 учеников. Все они являются читателями школьной и районной библиотек. Из них 20 ребят берут книги в школьной библиотеке, 15 — в районной. Сколько учеников не являются читателями школьной библиотеки?”.

В каком случае общее число учеников, пользующихся школьной библиотекой или районной библиотекой — 20 + 15 = 35, больше, чем число учащихся в классе? Так бывает, когда некоторые ученики берут книги и в одной библиотеке, и в другой. Сколько таких учеников в классе?

Пусть круг *Ш* изображает множество читателей школьной библиотеки, круг *Р* — районной. Тогда *ШР* — условное изображение множества читателей и районной, и школьной библиотек одновременно:

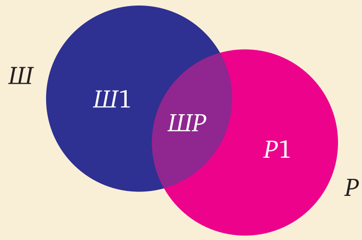


Рис. 1

Ясно также, что части кругов *Ш* и *Р*, обозначенные *Ш*1 и *Р*1, — это множество читателей, посещающих только школьную библиотеку и только районную библиотеку, соответственно.

Значение *ШР* может быть найдено так.

$Ш = 20$ человек, $Р = 15$ человек.

$$Ш1 = Ш - ШР = 20 - ШР \qquad (1)$$

$$Р1 = Р - ШР = 15 - ШР \qquad (2)$$

$Ш1 + ШР + Р1 = 30$ (общее число учеников в классе).

Подставляя вместо *Ш*1 и *Р*1 их значения из (1) и (2), получим:

$$20 - ШР + ШР + 15 - ШР = 30,$$

откуда $ШР = 5$, то есть пять учеников являются читателями школьной и районной библиотек одновременно.

Из *рис.* 1 следует, что число учеников, не являющихся читателями школьной библиотеки, равно

$$Р - ШР = 15 - 5 = 10.$$

Ответ: десять учеников не являются читателями школьной библиотеки.

Из приведенного решения мы получили две важные формулы:

$$Всего = A + B - AB \qquad (3)$$

$$AB = A + B - Всего \qquad (4)$$

— где *A* — количество (множество) людей или предметов, связанных с некоторым отдельным признаком *A*, *B* — то же, с признаком *B*, *AB* — количество людей или предметов, обладающих как признаком *A*, так и признаком *B*, *Всего* — общее число людей (или предметов) с признаками *A* или *B*.

Обсудим также вопрос — а могло ли в рассмотренной задаче быть так, что при известных значениях $Ш = 20$, $Р = 15$ и $ШР = 5$ общее число учени-

[1] Списки читателей, приславших правильные ответы на задачу, опубликованы в данном выпуске в рубрике “Задачник”.

ков в классе было равно 32? Да, могло. Определив по формуле (3) значение *Всего* (число ребят, посещающих школьную или районную библиотеки):

$$\text{Всего} = 15 + 20 - 5 = 30,$$

— мы можем сделать вывод, что 32 – 30 = 2 ученика класса не пользуются ни одной из указанных библиотек ☹.

При решении рассмотренной задачи *рис.* 1 играл существенную роль. В нем была удачно использована идея изображения множеств с помощью кругов. Эта идея полезна и при решении целого ряда других задач.

Выдающийся математик, физик, механик и астроном XVIII века Леонард Эйлер (он родился в Швейцарии, но много лет прожил в России) широко пользовался такими рисунками, и в его честь этот метод был назван "методом кругов Эйлера". Такой метод математики применяли и до Эйлера. Им пользовался, например, выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). В его черновых набросках были обнаружены рисунки с такими кругами. Но, как уже говорилось, достаточно основательно развил этот метод только Л.Эйлер. После Эйлера этот же метод разрабатывал чешский математик Бернард Больцано (1781–1848), только в отличие от Эйлера он рисовал не круглые, а прямоугольные схемы. Методом кругов Эйлера пользовался и немецкий математик Эрнст Шредер (1841–1902) в книге "Алгебра логики". Но особенного расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843–1923), подробно изложившего их в книге "Символическая логика", изданной в Лондоне в 1881 году. Поэтому такие схемы также называют иногда "диаграммами Венна" или "диаграммами Эйлера — Венна".

Можно сказать, что круги Эйлера (диаграммы Эйлера — Венна) — это наглядная геометрическая иллюстрация объемов понятий и отношений между ними.

Леонард Эйлер

Вернемся к "основной" задаче.

Прежде всего обратим внимание на то, что так как по условию из 36 учеников двое не были ни в кино, ни в театре, ни в цирке, то "где-то" побывали 34 человека.

Пусть круг *К* (*К*1, *КЦ*, *КТ*, *КТЦ*) изображает учеников, побывавших в кино, круг *Т* (*Т*1, *КТ*, *ТЦ*, *КТЦ*) — посетивших театр, круг *Ц* (*Ц*1, *КЦ*, *ТЦ*, *КТЦ*) — побывавших в цирке:

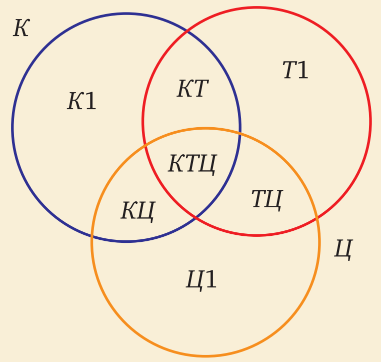


Рис. 2

Примечание. *К*1 — ученики, побывавшие на каникулах только в кино, *Т*1 — только в театре, *Ц*1 — только в цирке.

Рассмотрим два круга — *К* и *Т* (для экономии места отдельно вырисовывать их не будем). Согласно условию, *К* = 25 человек, *Т* = 11 человек, *КТ* + *КТЦ* = 6 человек (число ребят, посетивших два "места" — кино и театр).

Если вспомнить формулу (3), то можем сказать, что общее число учеников в кругах *К* (кино) и *Т* (театр) равно 25 + 11 – 6 = 30. Значит, только в цирке (*Ц*1) побывали 34 – 30 = 4 человека (вспомните тех, кто не попал во множество посещающих библиотеки).

Рассматривая круги *Т* и *Ц* и рассуждая аналогично, находим, что *К*1 = 34 – (11 + 17 – 4) = = 10 учеников (были только в кино).

Аналогично для кругов *К* и *Ц*:

*Т*1 = 34 – (25 + 17 – 10) = 2

(два ученика посетили только театр).

Далее, из *рис.* 2 следует, что количество ребят, посетивших не менее чем два "культурных учреждения", равно:

34 – (*К*1 + *Т*1 + *Ц*1) = 34 – (10 + 2 + 4) = 18,

то есть:

КТ + *КЦ* + *ТЦ* + *КТЦ* = 18. (5)

С другой стороны, по условию, побывали:

— в кино и театре — 6 человек (это *КТ* + *КТЦ*);

— в кино и цирке — 10 человек (*КЦ* + *КТЦ*);

— в театре и цирке — 4 человека (*ТЦ* + *КТЦ*).

Сложив все значения, имеем:

КТ + *КТЦ* + *КЦ* + *КТЦ* + *ТЦ* + *КТЦ* = 20 (6).

Вычтя (5) из (6), получим:

КТЦ + *КТЦ* = 20 – 18 = 2, то есть *КТЦ* = 1 (только один ученик был на каникулах и в кино, и в театре, и в цирке).

Ответ: 1.

Новые задачи

1. На фирме работают 57 человек. Из них 26 знают английский язык, 21 — немецкий язык, а 6 — оба языка. Сколько сотрудников фирмы:

1) не знают ни английского, ни немецкого языков;

2) знают хотя бы один из указанных языков;

3) знают только один английский язык;

4) знают только по одному иностранному языку?

2. В трех классах 35 мальчиков. 24 из них играют в футбол, 18 — в волейбол, 12 — в баскетбол. 10 ребят одновременно играют в футбол и в волейбол, 8 — в футбол и в баскетбол, а 5 — в волейбол и в баскетбол. Сколько мальчиков играют и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол одновременно?

Круги Эйлера и логические операции

Д.М. Златопольский,
Москва

Вспомним задачу об учениках и библиотеках (см. выше), но при этом изменим количественные показатели. Пусть информация об учениках, посещающих ту или иную библиотеку, представлена в табл. 1:

Таблица 1

Посещает	**Ученики**																			
	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	*С*	*Т*	*У*	*Ф*
Школьную																				
Районную																				

Фамилии учеников во второй строке условно обозначены буквами. Запишем в третьей строке букву “И” (от слова “истина”) для тех учеников, которые посещают школьную библиотеку, в четвертой строке — районную:

Таблица 2

Посещает	**Ученики**																				**Всего**
	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	*С*	*Т*	*У*	*Ф*	
Школьную		И	И	И	И	И	И	И				И	И	И		И	И		И		13
Районную	И	И			И		И		И	И		И		И				И	И	И	11

Дополним таблицу еще одной строкой и запишем в нее букву “И” для тех учеников, которые посещают как школьную, так и районную библиотеки:

Таблица 3

	Ученики																				
Посещает	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	*С*	*Т*	*У*	*Ф*	**Всего**
Школьную		И	И	И	И	И	И	И				И	И	И		И	И		И		13
Районную	И	И			И		И		И	И		И		И				И	И	И	11
Обе		И			И		И					И		И					И		6

Видно, что заполнение новой строки в табл. 3 проводилось по правилам, аналогичным правилам определения результата логической операции конъюнкции, или логического умножения (с логической связкой **И**):

1-е значение	Ложь	Ложь	Истина	Истина
2-е значение	Ложь	Истина	Ложь	Истина
(1-е значение) **И** (2-е значение)	Ложь	Ложь	Ложь	Истина

Нетрудно убедиться также, что значение числа учеников, посещающих обе библиотеки, соответствует формуле 4 в статье “Круги Эйлера (диаграммы Эйлера — Венна)” с учетом того, что некоторые ученики вообще не посещают указанные библиотеки (правда, может, они пользуются городской библиотекой).

Поэтому можно сказать, что область, выделенная на *рис.* 1 в только что указанной статье, соответствует логической операции конъюнкции двух множеств (кругов) — учеников, которые посещают школьную библиотеку, и учеников, которые пользуются районной библиотекой. Заметим также, что множество, являющееся результатом конъюнкции двух других множеств, называют “пересечением исходных множеств”.

Дополним табл. 2 еще одной строкой и запишем в нее букву “И” для тех учеников, которые посещают только какую-то одну библиотеку:

Таблица 4

	Ученики																				
Посещает	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	*С*	*Т*	*У*	*Ф*	**Всего**
Школьную		И	И	И	И	И	И	И				И	И	И		И	И		И		13
Районную	И	И			И		И		И	И		И		И				И	И	И	11
Какую-то одну	И		И	И		И		И	И	И			И			И	И	И		И	12

Здесь результат в четвертой строке определяется по правилам для логической операции строгой дизъюнкции (с логической связкой **XOR — исключающего ИЛИ**):

1-е значение	Ложь	Ложь	Истина	Истина
2-е значение	Ложь	Истина	Ложь	Истина
(1-е значение) **XOR** (2-е значение)	Ложь	Истина	Истина	Ложь

В кругах Эйлера область, соответствующая множеству учеников, посещающих только какую-то одну библиотеку, на *рис.* 1 ниже выделена желтым цветом, и она соответствует логической операции исключающего **ИЛИ** двух заданных множеств (кругов).

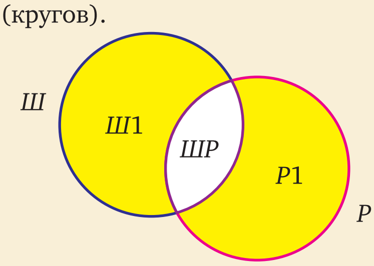


Рис. 1

Определим также число учеников, пользующихся по крайней мере одной библиотекой:

Таблица 5

Посещает	**Ученики**																				**Всего**
	А	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	*С*	*Т*	*У*	*Ф*	
Школьную		И	И	И	И	И	И	И				И	И	И		И	И		И		13
Районную	И	И			И		И		И	И		И		И				И	И	И	11
Одну или две	И	И	И	И	И	И	И	И	И	И		И	И	И		И	И	И	И	И	18

Результат (18) соответствует формуле (3) в статье “Круги Эйлера (диаграммы Эйлера — Венна)”, а в кругах Эйлера соответствующее множество на *рис.* 2 выделено серым цветом.

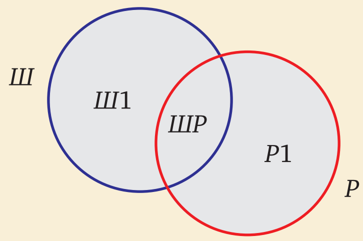


Рис. 2

Это множество называют “объединением исходных множеств”, или “соединением исходных множеств”.

Задания для самостоятельной работы

1. Нарисуйте круги Эйлера, выделив на них область, соответствующую множеству учеников:

1) не посещающих районную библиотеку, а пользующихся только школьной;

2) посещающих только городскую библиотеку (допустив, что среди 20 рассматриваемых учеников такие есть).

2. Составьте список учеников (используя вместо фамилий буквы), образующих пересечение множеств, заданных в табл. 2 и соответствующих отдельным библиотекам.

3. Составьте список учеников (используя вместо фамилий буквы), образующих объединение указанных выше множеств.

4. В таблице представлена информация о 16 учениках:

2	**Посещает**	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*
3	Школьную	И		И	И		И		И			И	И		И	И	И
4	Районную		И	И	И	И		И		И	И		И		И		

— где буква “И” говорит о том, что данный ученик посещает соответствующую библиотеку.

Оформите лист электронной таблицы для определения числовых значений в столбце R:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
1		**Фамилия**																
2	**Посещает**	*А*	*Б*	*В*	*Г*	*Д*	*Е*	*Ж*	*З*	*И*	*К*	*Л*	*М*	*Н*	*О*	*П*	*Р*	**Всего**
3	Школьную																	
4	Районную																	
5	Одну или две																	
6	Только одну районную																	
7	Обе																	
8	Какую-то одну																	
9	Ни одной																	

Указания по выполнению. Используйте значения ИСТИНА и ЛОЖЬ, логические функции, а также функцию СУММ (SUM) или СЧЕТЕСЛИ (COUNTIF).

В ответе на задание 2 укажите только формулы в ячейках B5:B9 (листы присылать не нужно).

“ЛОМАЕМ” ГОЛОВУ

Числовые ребусы в троичной системе

В приведенных ниже ребусах зашифрованы числа, записанные в троичной системе счисления. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры. Звездочкой (“*”) может быть любая цифра.

1.

$$\begin{array}{r} * \\ + \quad * \\ \hline * \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rr} & \mathrm{A} \\ + & * \\ \hline \mathrm{A} & * \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{rr} & \mathrm{B} \\ + & \mathrm{B} \\ \hline * & * \end{array}$$

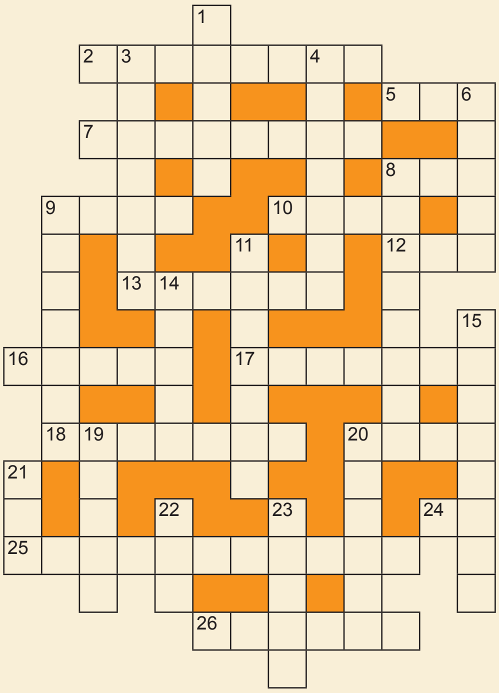
Шарики в коробочках

Имеется пять коробочек: белая, черная, красная, синяя и зеленая. Также есть по два шарика для каждого из указанных цветов. В каждой коробочке лежит по два шарика, причем цвета коробочки и шариков могут и не совпадать. Известно, что:

1. Ни один шарик не лежит в коробочке того же цвета, что и он сам;
2. В красной коробочке нет синих шариков;
3. В коробочке нейтрального цвета (то есть белого или черного) лежит один красный и один зеленый шарик;
4. В черной коробочке лежат шарики холодных тонов (зеленый и синий цвета);
5. В одной из коробочек лежат один белый и один синий шарик;
6. В синей коробочке находится один черный шарик. Какого цвета шарики лежат в каждой коробочке?

Кроссворд

Решите, пожалуйста, кроссворд.



По горизонтали

2. Совокупность четко определенных правил для решения задачи за определенное число шагов.
5. То, без чего не может работать исправный и включенный в сеть настольный персональный компьютер.
7. Логическая операция.
8. Буква греческого алфавита, которой, как правило, обозначают неизвестную величину.
9. Поименованная совокупность данных на носителе.
10. Популярный вид компьютерных программ.
12. Число в системе условных обозначений символов.
13. Устройство управления работой шины персонального компьютера, а также спортивный судья.